

三维耗散型电流体动力学系统在齐次 Triebel-Lizorkin 空间中的 BKM 型爆破准则^{*}

李秀蓉, 梁洪

(西北农林科技大学理学院, 陕西 杨凌 712100)

摘 要: 非线性耗散型电流体动力学系统局部光滑解的爆破问题由流体力学中的不可压 Navier-Stokes 方程和电动力学的 Poisson-Nernst-Planck 方程强耦合而成, 主要刻画等温不可压粘性流体中带电离子的漂移、扩散和对流现象。基于 Littlewood-Paley 分解理论, 建立了该系统局部光滑解在齐次 Triebel-Lizorkin 空间中与速度场水平分量相关的 BKM 型爆破准则, 推广了之前结果。特别地, 该爆破准则指出, 在研究解的爆破问题中, 速度场水平分量比带电粒子密度函数更具重要性。

关键词: 电流体动力学系统; Navier-Stokes 方程; Poisson-Nernst-Planck 方程; Triebel-Lizorkin 空间; 爆破准则
中图分类号: O175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2019) 03-0140-05

BKM's blowup criterion in homogeneous Triebel-Lizorkin spaces for the 3D dissipative system in electro-hydrodynamics

LI Xiurong, LIANG Hong

(College of Science, Northwest A&F University, Yangling 712100, China)

Abstract: In this paper, we study the breakdown of local smooth solutions for a class of nonlinear dissipative electro-hydrodynamics system. This system is a strongly coupled system by the well-known incompressible Navier-Stokes equations in hydromechanics and Poisson-Nernst-Planck equations in electrodynamics, modeling the drift, diffusion and convection phenomena of charged particle in an isothermal, incompressible and viscous fluids. Based on the Littlewood-Paley decomposition theory, the BKM's blowup criterion in terms of horizontal component of velocity field in homogeneous Triebel-Lizorkin spaces is established for local smooth solutions, and generalize the previous results. In particular, this blowup criterion reveals that the horizontal component of velocity field is more important than the density functions of charged particles in the blow-up theory of the system.

Key words: electro-hydrodynamics system; Navier-Stokes equations; Poisson-Nernst-Planck equations; Triebel-Lizorkin spaces; blowup criterion

本文主要研究一类来源于电流体动力学中刻画带电离子漂移、扩散和对流现象的数学模型。该模型中流体的运动由含源项的不可压 Navier-Stokes 方

程刻画, 而带电离子的运动由 Poisson-Nernst-Planck 方程给出, 具有强非线性, 奇异性和强耦合性, 其三维初值问题如下:

* 收稿日期: 2018-07-29

基金项目: 国家自然科学基金 (11501453); 陕西省面上项目 (2018JM1004, 2017JM1016)

作者简介: 梁洪 (1995 年生), 女; 研究方向: 随机偏微分方程; E-mail: lh19952@126.com

通信作者: 李秀蓉 (1994 年生), 女; 研究方向: 偏微分方程; E-mail: CherryXR@126.com

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla \pi = \Delta \psi \nabla \psi, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ \partial_t v + (u \cdot \nabla)v = \nabla \cdot (\nabla v - v \nabla \psi), \\ \partial_t w + (u \cdot \nabla)w = \nabla \cdot (\nabla w + w \nabla \psi), \\ \Delta \psi = v - w, \\ (u, v, w) |_{t=0} = (u_0, v_0, w_0), \end{cases} \quad (1)$$

其中, $u = (u^1, u^2, u^3)$ 和 π 分别表示流体的速度场和压力场, ψ 表示电子静电势, v 和 w 分别表示流体中带正电荷和负电荷离子的密度函数。为简单起见, 我们已经假设流体密度、粘性系数、电荷迁移率和介电常数均为 1。

系统 (1) 由 Rubinstein 于 20 世纪末在文献 [1] 中首次提出, 主要用来刻画等温不可压粘性流体中电场和流场间的相互作用和发展演变原理。2002 年, 基于 Kato 半群理论, Jerome 在文献 [2] 中建立了系统 (1) 局部光滑解的适定性理论。随后, 诸多学者考虑了系统 (1) 在各种初边值条件下的弱解问题, 得到了与不可压 Navier-Stokes 方程类似的一些结果。例如: Schmuck 在文献 [3] 中利用能量不等式和 Schauder 不动点定理, 针对 NSPN 系统的 Neumann 初边值问题, 证明了三维整体弱解的存在性以及若干唯一性和正则性结果。随后, Jerome 和 Sacco 在文献 [4] 中利用 Rothe 半离散化方法对 NSPN 系统的混合边界问题建立了任意维空间中整体弱解的存在性。Ryham 在文献 [5] 中研究了赋予 No-flux 边界条件的 NSPN 系统初边值问题二维弱解的整体存在性、唯一性和正则性以及三维情形下小稳态解附近整体弱解的存在性。另一方面, 对于系统 (1) 的初值问题, Zhao 等在文献 [6-8] 中建立了其在临界 Lebesgue 空间、负数阶临界 Besov 空间和 Besov-Triebel-Lizorkin 空间中的局部适定性和小初值问题的整体适定性, 并建立了自相似解的存在性及其渐近稳定性。特别地, 他们还建立了在临界 Besov 空间中的最优衰减估计。但是注意到, 由于 Navier-Stokes 方程是系统 (1) 的子系统 (此时 $v = w = \psi = 0$), 所以类似于 Navier-Stokes 方程, 三维情形下系统 (1) 整体弱解的正则性和唯一性或局部光滑解是否在有限时间发生爆破仍然是电流体动力学中极具挑战性的问题。针对整体弱解的正则性和唯一性问题, Fan 等在文献 [9-11] 和 Zhao 在文献 [12] 中分别建立了系统 (1) 三维整体弱解若干与速度场相关的正则性准则和唯一性准则; Zhao 在文献 [13] 中建立了系统 (1) 三维整体弱解在齐次 Besov 空间中与压力场相关的对数型正则性准则。

本文主要考虑系统 (1) 局部光滑解的爆破问题。最近在文献 [14] 中, Zhao-Bai 建立了系统 (1) 局部光滑解的 BKM 型爆破准则和 Prodi-Serrin 型爆破准则。特别地, 他们还建立了如下改进的 BKM 型爆破准则: 若系统 (1) 的局部光滑解 (u, v, w) 在时刻 T_* 发生爆破, 则一定有

$$\begin{aligned} \int_0^{T_*} \|\nabla_h u^h(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q dt &= \infty, \\ \frac{2}{q} + \frac{3}{p} &= 2, \frac{3}{2} < p \leq \infty \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $u^h = (u^1, u^2)$ 表示速度场的水平分量, $\nabla_h = (\partial_1, \partial_2)$ 表示梯度算子的水平分量。由文献 [14] 可知, 系统 (1) 局部光滑解的爆破只依赖于速度场的正则性, 而与带电离度密度函数的正则性无关。基于上述爆破准则 (2), 本文将主要建立系统 (1) 关于速度场水平分量在齐次 Triebel-Lizorkin 空间中的爆破准则。结论表明: 针对文献 [14] 中齐次 Besov 空间中的爆破准则 (2), 相应的爆破准则在齐次 Triebel-Lizorkin 空间中也是成立的。

1 定理的提出

定理 1 设 (u, v, w) 是系统 (1) 满足初始条件 $u_0 \in H^3(\mathbf{R}^3)$, $\nabla \cdot u_0 = 0$, $v_0, w_0 \in L^1(\mathbf{R}^3) \cap H^2(\mathbf{R}^3)$ 和 $v_0, w_0 \geq 0$ 的局部光滑解。若 $T_* < \infty$ 是局部光滑解 (u, v, w) 的最大存在时间, 则一定有

$$\begin{aligned} \int_0^{T_*} \|\nabla_h u^h(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q dt &= \infty, \\ \frac{2}{q} + \frac{3}{p} &= 2, \frac{3}{2} < p \leq \infty \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\nabla_h = (\partial_1, \partial_2)$, $u^h = (u^1, u^2)$ 。

注 1 在定理 1 的假设条件下, 如果对某个时间 $0 < T < \infty$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\nabla_h u^h(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q dt &< \infty, \\ \frac{2}{q} + \frac{3}{p} &= 1, 2 < p \leq \infty \end{aligned} \quad (4)$$

则局部光滑解 (u, v, w) 可以延拓至时间 T 。

注 2 在文献 [15] 中, Dong-Zhang 建立了 Navier-Stokes 方程局部光滑解关于速度场水平分量的爆破准则, 即如果

$$\int_0^T \|\nabla_h u^h(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0} dt < \infty \quad (5)$$

则光滑解 u 可以延拓至时间 T 。基于 Besov 空间和 Triebel-Lizorkin 空间有如下关系 $\dot{B}_{\infty, \infty}^0(\mathbf{R}^3) = \dot{F}_{\infty, \infty}^0(\mathbf{R}^3)$, 可知爆破准则 (3) 对于三维不可压 Navier-Stokes 方程组而言也是新的, 可以看成是

(5) 的推广。

2 预备知识

我们首先介绍 Fourier 变换。用 $S(\mathbf{R}^3)$ 表示 Schwarz 速降函数空间, $S'(\mathbf{R}^3)$ 表示其拓扑对偶空间, 即 Schwarz 缓增分布空间。对于任意的 $f \in S(\mathbf{R}^3)$, 其 Fourier 变换 $F(f) = \hat{f}$ 定义为:

$$F(f) = \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx$$

对于更一般的情形 $f \in S'(\mathbf{R}^3)$, 其 Fourier 变换可由标准的对偶方法来定义, 即

$$\langle \hat{f}, g \rangle := \langle f, \hat{g} \rangle, \forall g \in S(\mathbf{R}^3)$$

下面我们介绍 $\mathbf{R}^3$ 上的 Littlewood-Paley 理论。

令 $C := \{x \in \mathbf{R}^3, \frac{3}{4} \leq \xi \leq \frac{8}{3}\}$, 则存在光滑径向函数 φ 满足: $\text{supp } \varphi \subset C, 0 \leq \varphi \leq 1$, 且

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$$

基于上述 φ 的构造, 令 $\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)$, $h(x) = F^{-1}(\varphi)(x)$, 其中 F^{-1} 表示 Fourier 逆变换。则对任意的 $f \in S'(\mathbf{R}^3)$, 我们定义二进制分解算子 Δ_j 和 S_j 如下:

$$\Delta_j f := \varphi(2^{-j}D)f = 2^{3j} \int_{\mathbf{R}^3} h(2^j y) f(x - y) dy,$$

$$S_j f := \sum_{k \leq j-1} \Delta_k f$$

从形式上来看, Δ_j 表示投影到环 $\{\xi \in \mathbf{R}^3, |\xi| \approx 2^j\}$ 的投影算子, S_j 表示投影到球 $\{\xi \in \mathbf{R}^3, |\xi| \leq 2^j\}$ 的投影算子。注意到, 若定义 $S'_h(\mathbf{R}^3) := S'(\mathbf{R}^3)/P(\mathbf{R}^3)$, 其中 $P(\mathbf{R}^3)$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 上的多项式全体构成的集合。则对任意的 $f \in S'_h(\mathbf{R}^3)$, 有齐次 Littlewood-Paley 分解:

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \Delta_j f$$

下面我们给出齐次 Triebel-Lizorkin 空间的定义。令 $s \in \mathbf{R}, 1 \leq p, q \leq \infty$, 对任意的 $f \in S'_h(\mathbf{R}^3)$, 则定义齐次 Triebel-Lizorkin 空间如下:

$$\dot{F}_{p,q}^s(\mathbf{R}^3) := \{f \in S'_h(\mathbf{R}^3); \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s} < \infty\}$$

其中,

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s} := \begin{cases} \left\| \left(\sum_{j \in \mathbf{Z}} 2^{jsq} |\Delta_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p}, & 1 \leq q < \infty, \\ \left\| \sup_{j \in \mathbf{Z}} (2^{js} |\Delta_j f|) \right\|_{L^p}, & q = \infty \end{cases}$$

最后, 我们给出证明定理 1 需要用到的 Bernstein 不等式。

引理 1 ^[16] (Bernstein 不等式) 对任意 $f \in S'(\mathbf{R}^3)$, 任意非负整数 k , 任意实数对 (p, q) 满足 1

$\leq p \leq q \leq \infty$, 存在常数 C , 有如下不等式成立:

$$\text{supp } \hat{f} \subset \{|\xi| \leq 2^j\} \Rightarrow \sup_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^q} \leq C 2^{jk+3j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p},$$

$$\text{supp } \hat{f} \subset \{|\xi| \approx 2^j\} \Rightarrow C^{-1-k} 2^{jk} \|f\|_{L^p} \leq \sup_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C^{1+k} 2^{jk} \|f\|_{L^p}$$

3 定理 1 的证明

我们利用反证法来证明定理 1, 即假设 (3) 不成立, 则存在正常数 K , 有

$$\int_0^T \|\nabla_h u^h(\cdot, t)\|_{\dot{F}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q dt \leq K,$$

$$\frac{2}{q} + \frac{3}{p} = 2, \frac{3}{2} < p \leq \infty \quad (6)$$

基于文献 [14] 中的定理 1.4 的证明, 为证明定理 1, 我们只需推导出如下估计:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 dt \leq C_0 \quad (7)$$

其中, 常数 C_0 仅仅依赖于初值 $\|u_0\|_{H^1}$, $\|(v_0, w_0)\|_{L^1 \cap L^2}$, T 和 K 。

首先, 由文献 [14] 可知, 在定理 1 的假设条件下, 带电离子密度函数 $v, w \geq 0$, 且对任意 $0 \leq t \leq T$, 有如下的能量不等式成立:

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 + \|w(t)\|_{L^2}^2 +$$

$$2 \int_0^t (\|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 + \|\nabla w(\tau)\|_{L^2}^2) d\tau \leq$$

$$\|v_0\|_{L^2}^2 + \|w_0\|_{L^2}^2,$$

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \psi(t)\|_{L^2}^2 +$$

$$2 \int_0^t (\|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \psi(\tau)\|_{L^2}^2) d\tau \leq$$

$$\|u_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla \psi_0\|_{L^2}^2 \leq$$

$$\|u_0\|_{L^2}^2 + C \|(v_0, w_0)\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} \|(v_0, w_0)\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}$$

其次, 对方程组 (1) 的第一个方程两边作用算子 $\nabla \times$, 可得

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega - \Delta \omega = (\omega \cdot \nabla) u + \nabla \times (\Delta \psi \nabla \psi) \quad (8)$$

其中, $\omega = \nabla \times u$ 表示旋度。在式 (8) 两边同时乘以 ω , 然后在 $\mathbf{R}^3$ 上积分, 再做分部积分可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|_{L^2}^2 + \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 =$$

$$\int_{\mathbf{R}^3} (\omega \cdot \nabla) u \cdot \omega dx - \int_{\mathbf{R}^3} (\Delta \psi \nabla \psi) \cdot$$

$$(\nabla \times \omega) dx := I_1 + I_2 \quad (9)$$

注意到 $\nabla \cdot u = 0$, 所以有

$$\partial_3 u^3 = -(\partial_1 u^1 + \partial_2 u^2), \omega_3 = \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1$$

则 I_1 可表示为

$$I_1 = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3} \omega_i \partial_i u^j \omega_j dx = \\ \sum_{i,j=1}^2 \int_{\mathbf{R}^3} \omega_i \partial_i u^j \omega_j dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbf{R}^3} \omega_i \partial_i u^3 \omega_3 dx + \\ \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbf{R}^3} \omega_3 \partial_3 u^j \omega_j dx + \int_{\mathbf{R}^3} \omega_3 \partial_3 u^3 \omega_3 dx$$

于是, 我们有

$$I_1 \leq \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla_h u^h| |\omega|^2 dx \quad (10)$$

进一步, 对 $\nabla_h u^h$ 应用 Littlewood-Paley 二进制分解, 即

$$\nabla_h u^h = \sum_{j < -N} \Delta_j \nabla_h u^h + \sum_{j = -N} \Delta_j \nabla_h u^h + \sum_{j > N} \Delta_j \nabla_h u^h$$

从而由 (10) 可得

$$I_1 \leq \sum_{j < -N} \int_{\mathbf{R}^3} |\Delta_j \nabla_h u^h| |\omega|^2 dx + \\ \sum_{j = -N} \int_{\mathbf{R}^3} |\Delta_j \nabla_h u^h| |\omega|^2 dx + \\ \sum_{j > N} \int_{\mathbf{R}^3} |\Delta_j \nabla_h u^h| |\omega|^2 dx := I_{11} + I_{12} + I_{13} \quad (11)$$

为估计 I_1 , 一方面, 由 Biot-Savart 定律可知:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = R_j(\mathbf{R} \times \omega), j = 1, 2, 3, \\ \nabla \times \omega = \nabla \times (\nabla \times u) = \\ \nabla(\nabla \cdot u) - \Delta u = -\Delta u$$

其中, $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3)$, $R_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} (j = 1, 2,$

3) 表示 Riesz 算子。另一方面, 由于 Riesz 算子是 $L^2(\mathbf{R}^3)$ 上的有界线性算子, 因此有下面估计成立:

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq C\|\omega\|_{L^2}, \|\Delta u\|_{L^2} \leq C\|\nabla \omega\|_{L^2} \quad (12)$$

下面我们估计 I_1 。对 I_{11} , 由 Hölder 不等式, Bernstein 不等式和式 (12) 可推得

$$I_{11} = \sum_{j < -N} \int_{\mathbf{R}^3} |\Delta_j \nabla_h u^h| |\omega|^2 dx \leq \\ C \sum_{j < -N} \|\Delta_j \nabla_h u^h\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^2}^2 \leq \\ C \sum_{j < -N} 2^{\frac{3}{2}j} \|\Delta_j \nabla_h u^h\|_{L^2} \|\omega\|_{L^2}^2 \leq \\ C \left(\sum_{j < -N} 2^{3j} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j < -N} \|\Delta_j \nabla_h u^h\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\omega\|_{L^2}^2 \leq \\ C 2^{-\frac{3}{2}N} \|\nabla u\|_{L^2} \|\omega\|_{L^2}^2 \leq \\ C 2^{-\frac{3}{2}N} \|\omega\|_{L^2}^3 \quad (13)$$

对 I_{12} , 令 p' 是 p 的共轭指标, 即 $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, 结合 Hölder 不等式和如下的 Gagliardo-Nirenberg 不等式:

$$\|f\|_{L^{\frac{2p}{p-1}}}^{\frac{2p}{p-1}} \leq \|f\|_{L^2}^{1-\frac{3}{2p}} \|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{3}{2p}}, p \geq \frac{3}{2}$$

可得

$$I_{12} = \sum_{j = -N}^N \int_{\mathbf{R}^3} |\Delta_j \nabla_h u^h| |\omega|^2 dx \leq \\ C \int_{\mathbf{R}^3} \left(\sum_{j = -N}^N |\Delta_j \nabla_h u^h|^{\frac{2p}{3}} \right)^{\frac{3}{2p}} \left(\sum_{j = -N}^N 1^{\frac{2p}{2p-3}} \right)^{\frac{2p-3}{2p}} |\omega|^2 dx \leq \\ C N^{1-\frac{3}{2p}} \left\| \left(\sum_{j = -N}^N |\Delta_j \nabla_h u^h|^{\frac{2p}{3}} \right)^{\frac{3}{2p}} \right\|_{L^{p'}} \|\omega\|_{L^{2p'}}^2 \leq \\ C N^{1-\frac{3}{2p}} \|\nabla_h u^h\|_{\dot{B}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q \|\omega\|_{L^2}^{2(1-\frac{3}{2p})} \|\nabla \omega\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \leq \\ \frac{1}{8} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 + C N \|\nabla_h u^h\|_{\dot{B}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q \|\omega\|_{L^2}^2 \quad (14)$$

其中, $q = \frac{2p}{2p-3}$ 。对 I_{13} , 基于不等式 $\|\nabla^2 u\|_{L^2} = \|\Delta u\|_{L^2} \leq C\|\nabla \omega\|_{L^2}$ 和 Sobolev 嵌入不等式 $\|f\|_{L^6} \leq C\|\nabla f\|_{L^2}$, 我们有

$$I_{13} = \sum_{j > N} \int_{\mathbf{R}^3} |\Delta_j \nabla_h u^h| |\omega|^2 dx \leq \\ C \sum_{j > N} \|\Delta_j \nabla_h u^h\|_{L^3} \|\omega\|_{L^2} \|\omega\|_{L^6} \leq \\ C \sum_{j > N} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \nabla_h u^h\|_{L^2} \|\omega\|_{L^2} \|\nabla \omega\|_{L^2} \leq \\ C \left(\sum_{j > N} 2^{-j} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j > N} 2^{2j} \|\Delta_j \nabla_h u^h\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\omega\|_{L^2} \|\nabla \omega\|_{L^2} \leq \\ C 2^{-\frac{N}{2}} \|\omega\|_{L^2} \|\nabla^2 u\|_{L^2} \|\nabla \omega\|_{L^2} \leq \\ C 2^{-\frac{N}{2}} \|\omega\|_{L^2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 \quad (15)$$

结合式 (13) ~ (15), 我们得到了 I_1 的估计。现将这些估计代入 (11), 有

$$I_1 \leq \frac{1}{8} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 + C 2^{-\frac{3}{2}N} \|\omega\|_{L^2}^3 +$$

$$C N \|\nabla_h u^h\|_{\dot{B}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q \|\omega\|_{L^2}^2 + C 2^{-\frac{N}{2}} \|\omega\|_{L^2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 \quad (16)$$

对 I_2 , 利用式 (1) 的第五个方程, 能量不等式, Gagliardo-Nirenberg 不等式及式 (12) 可得

$$I_2 \leq C \|\nabla \psi\|_{L^4} \|\Delta \psi\|_{L^4} \|\Delta u\|_{L^2} \leq \\ \frac{1}{2} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + C \|(v, w)\|_{L^4}^2 \|\nabla \psi\|_{L^4}^2 \leq \\ \frac{1}{2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 + C \|(v, w)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v, \nabla w\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ \|\nabla \psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Delta \psi\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \leq \\ \frac{1}{2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 + C \|(v, w)\|_{L^2}^2 \|\nabla \psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v, \nabla w\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \leq \\ \frac{1}{2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 + C \|(v, w)\|_{L^2}^2 \|\nabla v, \nabla w\|_{L^2}^2 + \\ C \|(v, w)\|_{L^2}^2 \|\nabla \psi\|_{L^2}^2 \leq \\ \frac{1}{2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla v, \nabla w\|_{L^2}^2 + 1) \quad (17)$$

将式 (16) 和式 (17) 代入式 (9), 我们有

$$\frac{d}{dt} \|\omega\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 \leq$$

$$C2^{-\frac{3}{2}N} \|\omega\|_{L^2}^3 + CN \|\nabla_h u^h\|_{\dot{B}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q \|\omega\|_{L^2}^2 + \\ C2^{-\frac{N}{2}} \|\omega\|_{L^2} \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 + C(\|(\nabla v, \nabla w)\|_{L^2}^2 + 1) \quad (18)$$

取 N 充分大, 使得 $C2^{-\frac{N}{2}} \|\omega\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}$, 即

$$N \geq \frac{\ln(\|\omega\|_{L^2}^2 + e) + 2\ln C}{\ln 2} + 2$$

则由 (18) 可得

$$\frac{d}{dt} \|\omega\|_{L^2}^2 + \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 \leq C(1 + \|\nabla_h u^h\|_{\dot{B}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q + \\ \|(\nabla v, \nabla w)\|_{L^2}^2)(\|\omega\|_{L^2}^2 + e) \ln(\|\omega\|_{L^2}^2 + e) \quad (19)$$

最后, 令 $Z(t) := \|\omega\|_{L^2}^2 + e$, 根据 (19) 则有

$$\frac{d}{dt} \ln Z(t) \leq$$

$$C(1 + \|\nabla_h u^h\|_{\dot{B}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q + \|(\nabla v, \nabla w)\|_{L^2}^2) \ln Z(t)$$

应用 Gronwall 不等式, 我们有

$$\sup_{0 \leq t \leq T} Z(t) \leq \\ Z(0) \exp \left\{ \exp \left\{ C \int_0^T (1 + \|\nabla_h u^h(\tau)\|_{\dot{B}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q + \right. \right. \\ \left. \left. \|(\nabla v(\tau), \nabla w(\tau))\|_{L^2}^2) d\tau \right\} \right\}$$

即

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\omega(t)\|_{L^2}^2 \leq (e + \|\omega_0\|_{L^2}^2) \exp \left\{ \exp \left\{ CT + \right. \right. \\ \left. \left. C \int_0^T (\|\nabla_h u^h(\tau)\|_{\dot{B}_{p, \frac{2p}{3}}^0}^q + \|(\nabla v(\tau), \nabla w(\tau))\|_{L^2}^2) d\tau \right\} \right\}$$

从而由 (19) 可知 $u \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbf{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbf{R}^3))$, 即式 (7) 成立. 定理 1 证毕.

参考文献:

- [1] RUBINSTEIN I. Electro-Diffusion of Ions[M]. Philadelphia:SIAM Studies in Applied Mathematics, 1990.
- [2] JEMORE J W. Analytical approaches to charge transport in a moving medium[J]. Transport Theory Statist Phys, 2002, 31: 333 – 366.
- [3] SCHMUCK M. Analysis of the Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson system[J]. Math. Models Methods Appl. Sci, 2009, 19(6): 993 – 1015.
- [4] JEMORE J W, SACCO R. Global weak solutions for an incompressible charged fluid with multi-scale couplings: Initial-boundary-value problem [J]. Nonlinear Anal, 2009, 71: 2487 – 2497.
- [5] RYHAM R J. Existence, uniqueness, regularity and long-term behavior for dissipative systems modeling electrohydrodynamics[J]. Arxiv: 0910.4973v1.
- [6] ZHAO J H, DENG C, CUI S B. Global well-posedness of a dissipative system arising in electrohydrodynamics in negative-order Besov spaces [J]. J. Math Phys, 2010, 51: 093101.
- [7] ZHAO J H, ZHANG T, LIU Q. Global well-posedness for the dissipative system modeling electro-hydrodynamics with large vertical velocity component in critical Besov space[J]. Discrete Contin Dyn Syst Ser. A, 2015, 35(1): 555 – 582.
- [8] ZHAO J H, LIU Q. Well-posedness and decay for the dissipative system modeling electro-hydrodynamics in negative Besov spaces [J]. J. Differential Equations, 2017, 263: 1293 – 1322.
- [9] FAN J S, GAO H J. Uniqueness of weak solutions to a nonlinear hyperbolic system in electro-hydrodynamics[J]. Nonlinear Anal, 2009, 70: 2382 – 2386.
- [10] FAN J S, NAKAMURA G, ZHOU Y. On the Cauchy problem for a model of electro-kinetic fluid[J]. Applied Mathematics Letters, 2012, 25: 33 – 37.
- [11] FAN J S, LI F C, NAKAMURA G. Regularity criteria for a mathematical model for the deformation of electrolyte droplets [J]. Applied Mathematics Letters, 2013, 26: 494 – 499.
- [12] ZHAO J H. Regularity criteria for the 3D dissipative system modeling electro-hydrodynamics [J]. J. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 2017(3): 1 – 17.
- [13] 赵继红. 三维耗散型电流体动力学系统弱解的正则性准则[J]. 数学物理学报, 2018, 38(3): 549 – 564. ZHAO J H. Regularity criteria of weak solutions for the 3D dissipative system in electro-hydrodynamics [J]. Acta Mathematica Scientia, 2018, 38(3): 549 – 564.
- [14] ZHAO J H, BAI M. Blow-up criteria for the three dimensional nonlinear Dissipative system modeling electro-hydrodynamics [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2016, 31: 210 – 226.
- [15] DONG B Q, ZHANG Z F. The BKM criterion for the 3D Navier-Stokes equations via two velocity components [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11: 2415 – 2421.
- [16] BAHOURI H, CHEMIN J Y, DANCHIN R. Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations[M]. Berlin: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 2011: 343.